Απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ άρρητης συνάρτησης:

- Αν στην απροσδιοριστία μας οδήγησε **άρρητη** συνάρτηση (δηλαδή συνάρτηση στην οποία η μεταβλητή εμφανίζεται σε υπόριζο , δηλαδή $\sqrt{A(x)}$) τότε, <u>δεν μπορούμε να προχωρήσουμε σε παραγοντοποίηση</u>, ώστε να εμφανιστεί ο παράγοντας της απροσδιοριστίας (x-x_0) σε αριθμητή και παρονομαστή για να τον απλοποιήσουμε, <u>πριν διώξουμε τη ρίζα</u> . Για τον λόγο αυτό:

    1) Πρώτα πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή στου κλάσματος με αυτό που αποκαλούμε **συζυγή παράσταση**, για να φύγουν οι ρίζες.

Δοσμένη παράσταση με ρίζα	**Συζυγής παράσταση**	**Αποτέλεσμα**	**Ταυτότητα στην οποία βασίζεται**
$\sqrt{A} - B$	$\sqrt{A} + B$	$\sqrt{A}^2 - B^2 \;=\; A - B^2$	Διαφορά τετραγώνων: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
$A - \sqrt{B}$	$A + \sqrt{B}$	$A^2 - \sqrt{B}^2 = A^2 - B$	
$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	$\sqrt{A}^2 - \sqrt{B}^2 = A - B$	
$\sqrt[3]{A} - B$	$\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2$	$\sqrt[3]{A}^3 - B^3 \;=\; A - B^3$	Διαφορά κύβων: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^3)$ *(πιο σπάνια να τη συναντήσετε)*
$A - \sqrt[3]{B}$	$A^2 + A \cdot \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B}^2$	$A^3 - \sqrt[3]{B}^3 = A^3 - B$	
$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B}^2$	$\sqrt{A}^2 - \sqrt{B}^2 = A - B$	

Προσοχή: Ο πολλαπλασιασμός με τη συζυγή παράσταση πρέπει να γίνει και στον αριθμητή και στον παρονομαστή, για να μην αλλάξει η τιμή του κλάσματος.

2) Πλέον, οι ρίζες των παραγόντων που προκαλούν την απροσδιοριστία έχουν φύγει, με αποτέλεσμα να μπορούμε να εμφανίσουμε τον παράγοντα $(x-x_0)$ της απροσδιοριστίας και εν τέλει να τον απλοποιήσουμε.

Ασκήσεις:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$.

Το πολυώνυμο του παρονομαστή παραγοντοποιείται ως διαφορά τετραγώνων:

$x^2-1 = x^2-1^2 = (x-1)(x+1)$.

Για να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή πρέπει πρώτα να διώξουμε τη ρίζα. Για τον λόγο αυτό πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x+3}+2$ και φυσικά, το ίδιο κάνουμε και στον παρονομαστή για να μην αλλάξει η τιμή του κλάσματος:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}^2-2^2}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{1}{2\left(\sqrt{4}+2\right)} = \frac{1}{8}$$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^2-2x}$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$.

Το πολυώνυμο του παρονομαστή παραγοντοποιείται ως διαφορά τετραγώνων:

x^2-2x = x(x-2) .

Για να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή πρέπει πρώτα να διώξουμε τη ρίζα. Για τον λόγο αυτό πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή του κλάσματος με τη συζυγή του παράσταση $\sqrt{3-x}+1$ και φυσικά, το ίδιο κάνουμε και στον παρονομαστή για να μην αλλάξει η τιμή του κλάσματος:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3-x}-1\right)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}{x(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}^2-1^2}{x(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-x-1}{x(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}= \;=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}}{x\,\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{x\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=\frac{-1}{2\left(\sqrt{1}+1\right)}=-\frac{1}{4}$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}-2}$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$.

Εδώ έχουμε τη διπλάσια δουλειά να κάνουμε, αφού ούτε ο αριθμητής, ούτε ο παρονομαστής μπορούν να παραγοντοποιηθούν κατευθείαν.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left[\sqrt{x-1}^2-\sqrt{3-x}^2\right]\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left[\sqrt{x+2}^2-2^2\right]\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{[x-1-(3-x)]\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x+2-4)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2\,\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}} = \frac{2\left(\sqrt{4}+2\right)}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 4$$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}{x^2-x}$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Εδώ έχουμε κυβικές ρίζες στον αριθμητή όποτε θα χρησιμοποιήσουμε συζυγή παράσταση ώστε να καταλήξουμε σε διαφορά κύβων:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{2-x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x}^2\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt[3]{2-x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x}^2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2-x}^3-\sqrt[3]{x}^3}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{2-x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x}^2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{2-x-x}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{2-x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x}^2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{2-x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x}^2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{-2\,\cancel{(x-1)}}{x\,\cancel{(x-1)}\left(\sqrt[3]{2-x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x}^2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}\left(\sqrt[3]{2-x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x}^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{x\left(\sqrt[3]{2-x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x}^2\right)}=$$

$$\frac{-2}{1\left(\sqrt[3]{1}^2+\sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}^2\right)}=\frac{-2}{3}$$

- **Μέθοδος διάσπασης κλάσματος:** Αν στον αριθμητή ή τον παρονομαστή του κλάματος έχουμε 2 ρίζες και κάτι ακόμα $\left(\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}-\Gamma\right)$ τότε, πριν εφαρμόσουμε συζυγή παράσταση διασπάμε κατάλληλα το κλάσμα:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{8-x}-5}{x^2-1}$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι: $\sqrt{x+5}\overset{x=-1}{\rightarrow}\sqrt{4}=2$ άρα μηδενίζεται από το -2 , ενώ $\sqrt{8-x}\overset{x=-1}{\rightarrow}\sqrt{9}=3$ άρα μηδενίζεται από το -3 . Οπότε πρώτα διασπάμε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{8-x}-5}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{8-x}-2-3}{x^2-1^2}=$$

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{x+5}-2}{(x-1)(x+1)}+\frac{\sqrt{8-x}-3}{(x-1)(x+1)}\right]$$

και έπειτα εφαρμόζουμε συζυγή παράσταση σε κάθε κλάσμα ξεχωριστά:

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{\left(\sqrt{x+5}-2\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}+\frac{\left(\sqrt{8-x}-3\right)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{x+5}^{\,2}-2^2}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}+\frac{\sqrt{8-x}^{\,2}-3^2}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{x+5-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}+\frac{8-x-9}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)\,\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x+5}+2\right)}+\frac{-\cancel{(x+1)}}{(x-1)\,\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{8-x}+3\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}+\frac{-1}{(x-1)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}\right]=$$

$$\frac{1}{-2\left(\sqrt{4}+2\right)}+\frac{-1}{-2\left(\sqrt{9}+3\right)}=-\frac{\overset{3}{1}}{8}+\frac{\overset{2}{1}}{12}=-\frac{3}{24}+\frac{2}{24}=-\frac{1}{24}$$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}-1}{x^2-3x}$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι: $\sqrt{x+1}\xrightarrow{x=3}\sqrt{4}=2$ άρα μηδενίζεται από το -2 , ενώ

$-\sqrt{x-2}\xrightarrow{x=3}-\sqrt{1}=-1$ άρα μηδενίζεται από το 1 . Οπότε πρώτα διασπάμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}-1}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}-2+1}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x(x-3)}+\frac{1-\sqrt{x-2}}{x(x-3)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}+\frac{\left(1-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{x(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}^2-2^2}{x(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}+\frac{1^2-\sqrt{x-2}^2}{x(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x+1-4}{x(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}+\frac{1-(x-2)}{x(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{\cancel{x-3}}{x\,\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}+\frac{-\cancel{(x-3)}}{x\,\cancel{(x-3)}\left(1+\sqrt{x-2}\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x\left(\sqrt{x+1}+2\right)}+\frac{-1}{x\left(1+\sqrt{x-2}\right)}\right] =$$

$$\frac{1}{3\left(\sqrt{4}+2\right)}-\frac{1}{3\left(1+\sqrt{1}\right)} = \frac{1}{12}-\frac{1}{6} = \frac{1}{12}-\frac{2}{12} = -\frac{1}{12}$$

Επιπλέον ασκήσεις για λύση:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{3x+10}}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-\sqrt{x+6}}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3}-2x}$